TD 5 - Electromagnétisme

Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Questions de cours

Pour apprendre le cours : vérifiez que vous savez répondre à chaque question.

1. Quelle équation aux dérivées partielles est satisfaite par $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ dans le vide ? L'établir à partir des équations de Maxwell.
2. Donner la définition d'une onde scalaire plane, plane progressive, plane progressive harmonique.
3. Quelle est la solution générale de l'équation de d'Alembert scalaire en 1D ?
4. Citer les ordres de grandeur des différents domaines des ondes électromagnétique.
5. Définir le vecteur d'onde.
6. Quelle est la relation de dispersion dans le vide ?
7. Quelle relation existe-t-il entre $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ pour une OPPH ? Donner la relation de structure pour une OPP.
8. Quelle propriété énergétique possèdent les OPPH électromagnétique dans le vide ?
9. Exprimer le vecteur de Poynting pour une OPPH électromagnétique.
10. Définir la polarisation d'une onde., et la polarisation rectiligne. Donner un exemple d'onde non polarisée.

Exercice de cours - Savoir-Faire

SF 1 - Reconnaître une direction de propagation, une polarisation rectiligne

On considère les ondes suivantes :

1. $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0(\overrightarrow{u_x} - 2\overrightarrow{u_y})\cos(\omega t - kz + \varphi)$
2. $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_0 e^{i\pi/2}(\overrightarrow{u_x} - 2\overrightarrow{u_y})e^{i(\omega t - kz)}$
3. $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_0 e^{i\pi/2}(\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_z})e^{i(\omega t - kx)}$
4. $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_0 e^{i\pi/2}(\overrightarrow{u_x} - i\overrightarrow{u_y})e^{i(\omega t - kz)}$

1. Dans chacun des cas, indiquer la direction de propagation de l'onde, puis dire s'il s'agit d'une OPPM polarisée rectilignement ou non et si c'est le cas donner la direction de polarisation.
2. Dans le cas numéro 2, donner l'expression du champ électrique réel, et celle du champ magnétique.

3. Dans le cas numéro 4, donner l'expression du champ électrique réel. Montrer que la pointe du vecteur $\overrightarrow{E}$ décrit un cercle dans le plan Oxy. Dans quel sens ?
4. On considère l'onde donnée par $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0(\overrightarrow{u_x} - \overrightarrow{u_y})\cos(\omega t - q(x+y))$
Est-elle une onde plane ? On répondra en donnant l'équation des surfaces d'onde.
Donner l'expression du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, ainsi que la direction de propagation.
S'agit-il d'une polarisation rectiligne ? La direction de polarisation est-elle compatible avec celle de propagation ?

Exercice phare

Exercice 1 - Loi de Malus

Sur un banc optique d'axe (Oz), on place successivement une source de lumière monochromatique de longueur d'onde λ ; un premier polariseur (P) d'axe passant $\overrightarrow{u}$; un second polariseur (A) d'axe passant $\overrightarrow{v}$ appelé analyseur ; et un photodétecteur permettant de mesurer l'intensité de la lumière sortant de l'analyseur. La lumière dans le dispositif est décrite comme une onde plane progressive harmonique. Les directions passantes $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du polariseur et de l'analyseur forment un angle θ. On note $\overrightarrow{u_\perp}$ (resp. $\overrightarrow{v_\perp}$) le vecteur unitaire tel que la base $\mathcal{B}_P = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_\perp}, \overrightarrow{e_z})$ soit orthonormée directe (resp. $\mathcal{B}_A = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_\perp}, \overrightarrow{e_z})$).

1. Faire un schéma du montage.
2. Donner l'expression dans la base $\mathcal{B}_P$ du champ $\overrightarrow{E}_P$ ayant traversé le polariseur en fonction de z, t et λ.
3. Exprimer $\overrightarrow{E}_P$ dans la base $\mathcal{B}_A$. En déduire l'expression du champ $\overrightarrow{E}_{PA}$ ayant traversé successivement le polariseur et l'analyseur puis celle du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}_{PA}$.

L'intensité lumineuse mesurée par le photodétecteur est définie comme étant la valeur moyenne (spatiale et temporelle) du flux du vecteur de Poynting sur toute la surface S du photodétecteur :

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} \right\rangle$$

où le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est normal au photodétecteur.

4. Montrer que l'intensité peut s'écrire sous la forme $I = I_0 \cos^2\theta$. Cette relation est appelée loi de Malus.

Exercices en plus

Exercice 2 - Onde sphérique

Exercice simple, mais sur une notion hors programme (onde sphérique)
On considère un émetteur isotrope d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle : il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne, etc. L'onde émise est sphérique, de la forme en coordonnées sphériques $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{u_\theta}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$. Le milieu de propagation est assimilé au vide.

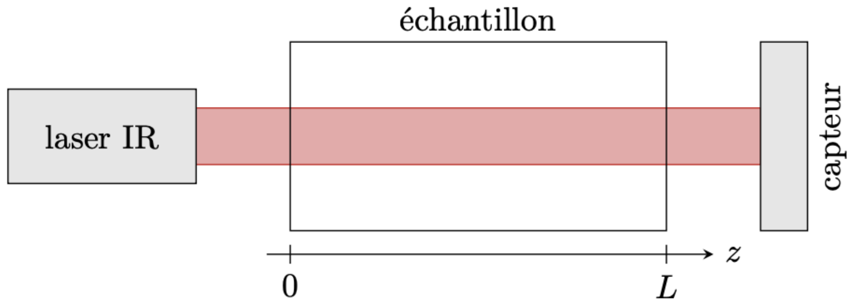
1. Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ de l'onde sphérique.

2. On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.
3. Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.
4. Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de rayon r. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de r. En déduire que $E_0(r) = A/r$ avec A une constante à déterminer.

Exercice 3 - Mesure de la concentration en CO_2 atmosphèrique

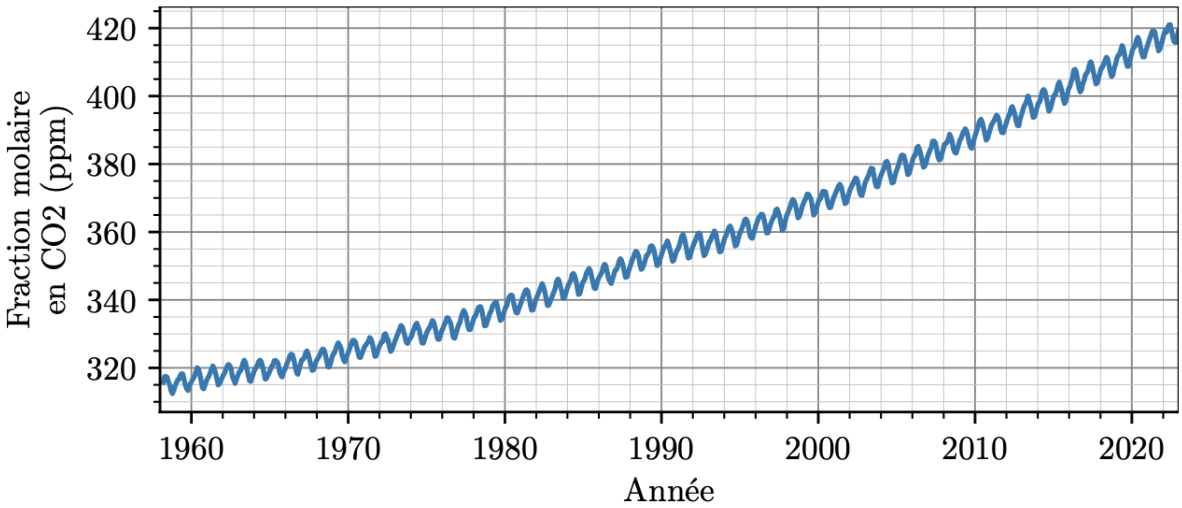
Le développement de modèles climatiques et l'actualisation de leurs prédictions nécessite des mesures précises de la fraction molaire en CO_2 présent dans l'atmosphère. Celle-ci est usuellement exprimée en parties par millions (ppm) : une fraction molaire de 413 ppm indique par exemple qu'un million de molécules d'air contient en moyenne 413 molécules de CO_2.

Pour ce faire, un échantillon d'air est prélevé, de préférence en relative altitude et loin de toute perturbation humaine, puis refroidi pour condenser toute la vapeur d'eau, avant d'être analysé. Le principe est celui de la spectrophotométrie : un faisceau laser de longueur d'onde 4,26 μm, à laquelle le spectre d'absorption du CO_2 présente un maximum, traverse un échantillon de longueur connue. Comparer les intensités lumineuses avant et après traversée de l'échantillon permet d'en déduire la concentration en CO_2, en nombre de molécules par m^3 d'air. Les capteurs de CO_2 popularisés comme indicateurs de la qualité de l'air lors de la crise du Covid-19, fonctionnent sur le même principe, mais avec des exigences de précision bien moindre.



1. On modélise le faisceau laser par un cylindre de section S au sein duquel se propage une onde plane progressive monochromatique de polarisation rectiligne selon $\overrightarrow{u_x}$. Écrire le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur de Poynting de l'onde.
2. Les capteurs utilisés sont sensibles à l'intensité du faisceau, définie comme une double moyenne spatiale et temporelle du vecteur de Poynting sur toute la section S du faisceau : $I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} \right\rangle$ Relier I à l'amplitude du champ électrique de l'onde.
3. Chaque molécule de CO_2 se trouvant dans le faisceau absorbe en moyenne une puissance p proportionnelle à l'intensité : $p = \sigma I$, où σ est une constante tabulée dépendant uniquement de la longueur d'onde. En raisonnant sur une tranche infinitésimale du faisceau, montrer que l'intensité vérifie l'équation différentielle $\frac{dI}{dz} + \sigma n I = 0$, où n est la densité volumique de CO_2, c'est-à-dire le nombre de molécules de CO_2 par unité de volume dans l'échantillon.

4. On appelle absorbance de l'échantillon le rapport $A = \ln \dfrac{I(z=0)}{I(z=L)}$ Montrer que la connaissance de l'absorbance permet de remonter à n.
5. En pratique, on procède à température et pression parfaitement contrôlées et par comparaison avec des échantillons étalons de concentration connues. Expliquer ces choix expérimentaux.
6. La figure ci-dessous représente l'évolution temporelle de la fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire situé au sommet du volcan de Mauna Loa, à Hawaï. Proposer une interprétation aux tendances observées.



Fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire de Mauna Loa. Les mesures représentées sont des moyennes mensuelles.